TD : Problème de Correspondance de Post.

Olivier Raynaud

raynaud@isima.fr

Résumé

Le problème de correspondance de Post est un problème indécidable dont l'énoncé s'exprime très simplement. Dans ce Td nous allons décrire ce problème et montrer son équivalence avec une variation de ce problème. Nous montrerons enfin que le problème de correspondance de Post est indécidable.

Le **P**roblème de **C**orrespondance de **P**ost a été introduit en 1946 par Emile Post dans *A variant of a recursively unsovable problem* et peut être défini formellement de la façon suivante :

Problème 1. *Problème de correspondance de Post (PCP)*
Instance : *Deux suites de mots sur un alphabet* $\mathcal{A}$*, de longueur* m*,* $(u_1, u_2, \ ..., u_m)$ *et* $(v_1, v_2, \ ..., v_m)$.
Question : *Existe-t-il une suite finie* $i_1, i_2, \ ..., i_n$ *d'entiers dans* $[1, m]$ *telle que :*

$$u_{i_1} u_{i_2} ... u_{i_n} = v_{i_1} v_{i_2} ... v_{i_n}$$

De façon moins formelle, étant donné un ensemble de dominos portant chacun, en haut et en bas, une suite de lettres ou symboles, existe-t-il un arrangement des dominos formant par concaténation la même suite de lettres en haut et en bas. Chaque domino de l'ensemble initial pouvant apparaitre plusieurs fois dans la concaténation. Nous renvoyons à la Figure 1 pour une illustration.

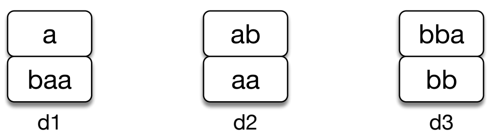

Figure 1 – Exemple d'instance du problème de correspondance de Post.

Exercice 1 (Quelques exemples).

Question 1. *Proposer les solutions aux instances du problème de Post données en Figure 2 .*

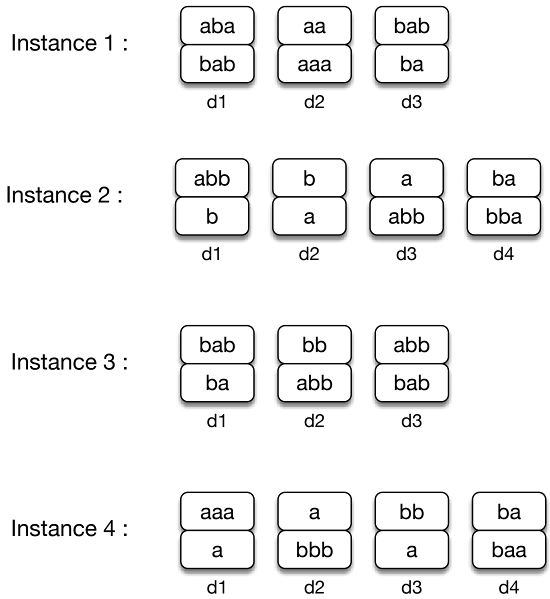

Figure 2 – Instances du problème de correspondance de Post.

Question 2 (Une belle holorime pour finir).
Retrouver le couple de vers holorimes à partir des listes de mots suivantes : (tendu, lasse, six, Célimène, au thé, a, roses) et (attendu, la, Sire, c'est, sauter, l'hymen, ose).

Exercice 2 (Indécidabilité par réduction)**.**

Définition 1 (Réduction)**.**
Une réduction d'un problème A à un problème B est une fonction $tr()$ calculable telle que pour toute instance i de A, i est une instance positive de A si et seulement si $tr(i)$ est instance positive de B (cf. Figure 3).

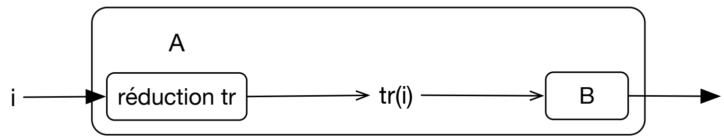

FIGURE 3 – Réduction du problème A au problème B.

On dit que A se réduit à B s'il existe une réduction de A à B.

Théorème 1. *Si un problème A se réduit à un problème B, alors A indécidable implique B indécidable.*

Question 1. *Démontrer le théorème 1*

Exercice 3 (Problème de l'acceptation)**.**

Problème 2. *$Acceptation_{MT}$: Problème de l'acceptation par une machine de Turing*
Instance : *Une machine de Turing M, un mot w ;*
Question : *La machine M s'arrête-elle pour le mot w ?*

Théorème 2. *Le problème $Acceptation_{MT}$ est indécidable.*

Question 1. *Montrer le théorème 2.*

Exercice 4 (Problème de Correspondance de Post Modifié (PCPM)).

Problème 3. *Problème de correspondance de Post modifiée(PCPM)*
Instance : *Deux suites de mots sur un alphabet $\mathcal{A}$, de longueur m, $(u_1, u_2, \ ..., u_m)$ et $(v_1, v_2, \ ..., v_m)$.*
Question : *Existe-t-il une suite finie $i_1, i_2, \ ..., i_n$ d'entiers dans $[1, m]$ telle que :*

$$u_{i_1} u_{i_2} ... u_{i_n} = v_{i_1} v_{i_2} ... v_{i_n} \text{ avec } i_1 = 1$$

Question 1. *Soit I une instance pour le problème PCP, montrer que si vous disposez d'un Oracle pour le problème PCPM alors vous savez répondre à PCP pour I.*

Nous définissons deux fonctions s et p de $\mathcal{A}^*$ sur $(\mathcal{A} \cup \{\$\})^*$.
Soit un mot w de $\mathcal{A}^*$, $w = l_1 l_2 ... l_k$:

- $p(w) = \$l_1\$l_2...\$l_k$;
- $s(w) = l_1\$l_2\$...l_k\$$;

Question 2. *Vérifier que si u et v sont des mots sur $\mathcal{A}^*$ alors $p(vw) = p(v)p(w)$ et que $s(vw) = s(v)s(w)$. Vérifier enfin que $p(u)\$ = \$s(u)$.*

Soit l'instance suivante I_m du problème PCPM : deux listes de mots sur $\mathcal{A}$ de longueur m $(u_1, u_2, \ ..., u_m)$ et $(v_1, v_2, \ ..., v_m)$.

Soit la transformation $\mathcal{T}$ de I_m en I_{2m+1} suivante :

- $u'_k = p(u_k)$ *et* $v'_k = s(v_k)$ *pour* $1 \leq k \leq m$;
- $u'_{m+k} = p(u_k)\$$ *et* $v'_{m+k} = s(v_k)$ *pour* $1 \leq k \leq m$;
- $u'_{2m+1} = p(u_1)\$$ *et* $v'_{2m+1} = \$s(v_1)$.

Question 3. *Soit une instance I pour le problème PCPM, montrer que si PCPM répond* ***Oui*** *pour I alors un Oracle pour PCP répond* ***Oui*** *pour $\mathcal{T}(I)$.*

Question 4. *Réciproquement, vérifier que toute solution du problème PCP correspond à une solution du problème PCPM original. En déduire que les deux problèmes PCP et PCPM sont équivalents.*

Exercice 5 (Indécidabilité du problème de Post)**.**

Dans cet exercice nous allons montrer que le problème de correspondance de Post est indécidable. Pour cela nous allons montrer que le problème de l'acceptation se réduit au PCPM (PCP étant équivalent au PCPM). Confère Figure 4

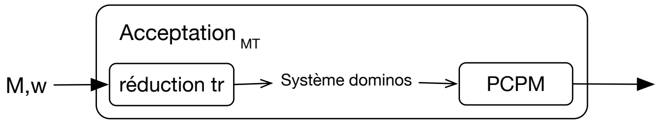

FIGURE 4 – Réduction tr du problème $Acceptation_{MT}$ dans $PCPM$

Sot une machine de Turing $M = \{\mathcal{Q},\ \mathcal{A},\ \mathcal{E},\ q_0,\ acc\}$ *et un mot* $W = w_1w_2...w_n$*. Une instance* I *du problème de l'acceptation correspond au couple* (M, W)*. Nous proposons une transformation* tr *de* I *en une instance du problème de correspondance de Post modifié (PCPM).* $tr(I)$ *est le système de dominos défini en Figure 5*

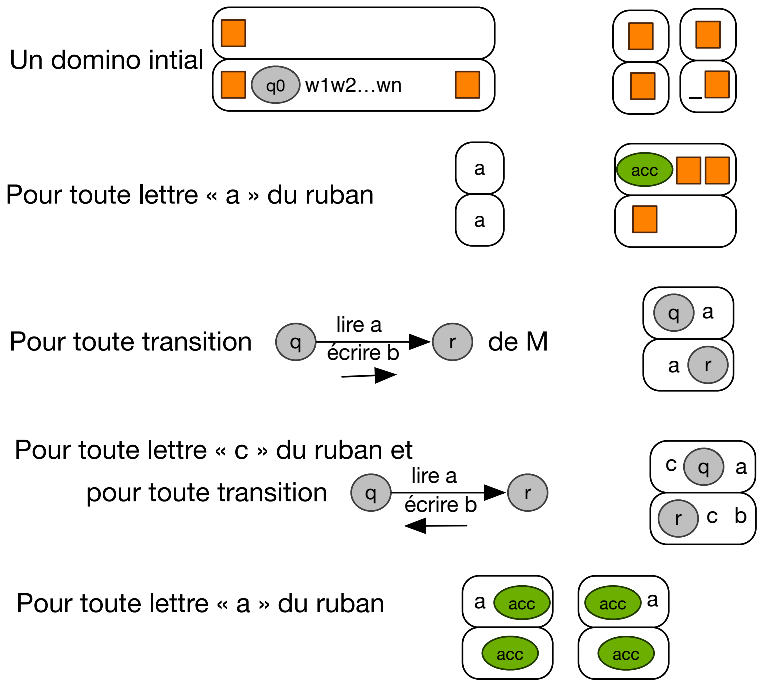

FIGURE 5 – Soit $I = (M, W)$ avec $W = w_1w_2...w_n$, $tr(I)$ est obtenu par les règles décrites.

Question 1. *Construire le système de dominos $tr(i)$ sur l'instance $i = (M, aba)$ avec la M la machine donnée en Figure 6. Construire la solution à l'instance du problème PCPM ainsi obtenue.*

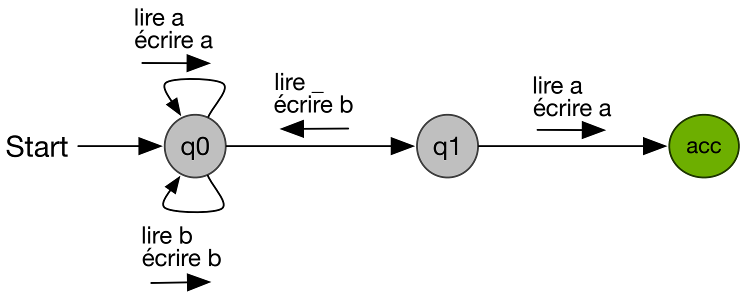

FIGURE 6 – La machine de Turing M.

Question 2. *Montrer que si le PCPM répond* **Oui** *pour $tr(I)$ si et seulement si le mot w est reconnu par la machine M. En déduire que le problème de Post est indécidable.*